AtCoder Beginner Contest 454 题目讲解

云浅

2026-4-20

Outline

A. Closed interval

A. Closed interval

输出 $R - L + 1$

B. Mapping

B. Mapping

略

C. Straw Millionaire

C. Straw Millionaire

有 N 种物品，编号为物品 1 到物品 N。初始时，高桥只有物品 1。

他有 M 个朋友。如果他把物品 A_i 给第 i 个朋友（$1 \le i \le M$），他就会收到物品 B_i。

求他最终能获得的物品种类数（包括物品 1）。

数据范围：

- $2 \le N \le 3 \times 10^5$
- $1 \le M \le 3 \times 10^5$
- $1 \le A_i, B_i \le N$
- $A_i \ne B_i$

C. Straw Millionaire

建一个有向图，有 N 个点代表 N 个物品，第 i 条边从 $A_i \to B_i$，答案就是 1 能到达的点数。

D. (xx)

D. (xx)

给定一个由字符（、x、）组成的字符串 A。

你可以对 A 任意次、任意顺序地执行以下两种操作：

- 选择 A 中出现的一个子串 (xx)，并将其替换为 xx。
- 选择 A 中出现的一个子串 xx，并将其替换为 (xx)。

给定一个同样由（、x、）组成的字符串 B。判断是否可以通过一系列操作将 A 变为 B。

给定 T 个测试用例，请对每个测试用例求解。

数据范围：

- $1 \leq T \leq 3 \times 10^5$
- A 和 B 是由（、x、）组成的字符串，长度在 1 到 2×10^6 之间（包含端点）
- 所有测试用例的 $|A| + |B|$ 之和不超过 2×10^6（其中 $|A|$ 表示 A 的长度）

D. (xx)

注意到操作是可逆的，于是有这样的想法：对每个串 s，把它化简成某种最简的形式 $f(s)$，然后只需要判断是否有 $f(A)=f(B)$。

那么自然地，我们可以尝试尽可能减少 s 的长度，即定义 $f(s)$ 为 s 通过以上变换能到达的最短字符串。

为了减少 s 的长度，在出现 (xx) 时直接改成 xx 一定是不劣的。所以我们直接从前往后扫一遍，遇到末尾出现 (xx) 的时候就直接把它改成 xx，这样一直消除，就可以求出来 $f(s)$。

时间复杂度：$O(|A|+|B|)$

E. LRUD Moving

E. LRUD Moving

给定正整数 N, A, B，保证 A 和 B 均在 1 到 N 之间（包含端点）。

有一个 $N \times N$ 的网格。从上往下第 i 行、从左往右第 j 列的单元格记为 (i, j)。初始时，棋子位于单元格 $(1, 1)$。

通过重复进行 $N^2 - 2$ 次移动（每次移动将棋子移动到相邻的单元格（上、下、左、右）），你希望将棋子移动到单元格 (N, N)，同时访问除 (A, B) 之外的所有单元格。你不能重复访问同一个单元格（在过程中也不能访问 $(1, 1)$ 和 (N, N)）。

判断是否存在这样的移动序列，如果存在，输出一个这样的序列。

给定 T 个测试用例，请对每个测试用例求解。

数据范围：

- $1 \le T \le 5000, 2 \le N \le 10^3, \sum N^2 \le 10^6$
- $(A, B) \neq (1, 1), (N, N)$

E. LRUD Moving

每走一步必定会改变当前格子 (i,j) 的坐标和 $i+j$ 的奇偶性，而开头 $(1,1)$ 和 (N,N) 的坐标和都是偶数（2 和 $2N$），所以步数 N^2-2 必须是偶数，也就是说 N 必须是偶数。

进一步，一共经过了 N^2-1 个格子，这些格子的坐标和肯定是奇偶交替的，而开头和结尾的坐标和都是偶数，所以除去 (A,B) 剩下的格子种，坐标和为偶数的格子比奇数格子多一个。那也就是说 (A,B) 需要是一个奇数格子，即 $A+B$ 为奇数。

E. LRUD Moving

这种情况一定有解吗？可以考虑递归构造。$N=2$ 是简单的，对于 $N \geq 4$ 的情况：

- 如果 (A,B) 不在前两行 or 前两列，那么我们考虑把 $N \to N-2$，显然可以构造从 $(1,1)$ 走到 $(3,3)$，并且走遍 $(1,x),(2,x),(x,1),(x,2)$ 的路径。
- 否则，不妨假设 (A,B) 在前两行，我们考虑把 $N \to N-3$（因为不经过障碍能从 $(1,1) \to (N,N)$ 的前提是 N 为奇数）。
- ▸ 如果在第一行即 $A=1$，那么 B 是偶数，可以先跨过 B，然后在 $[B+1,N]$ 和 $[1,B-2]$ 这部分上下来回走，偶数可以保证最后一步不会把自己堵死，最后就可以走到 $(3,3)$ 了
- ▸ 如果在第二行即 $A=2$，那么 B 是奇数，和之前类似，也可以上下来回走。

这样就完成了构造。

F. Make it Palindrome 2

F. Make it Palindrome 2

给定一个正整数 N，一个正整数 M，以及一个长度为 N 的整数序列 $A = (A_1, A_2, ..., A_N)$。保证 A 的每个元素都在 0 到 $M - 1$ 之间（包含端点）。

你可以对整数序列 A 进行任意多次（可能为零次）以下操作：

- 选择一对整数 (l, r) 满足 $1 \le l \le r \le N$，并将每个 $i = l, l + 1, ..., r$ 的 A_i 替换为 $(A_i + 1) \bmod M$。

求使 A 变为回文所需的最少操作次数。

这里，当对于 $i = 1, 2, ..., N$ 有 $A_i = A_{N+1-i}$ 成立时，称 A 是回文。

给定 T 个测试用例，请对每个测试用例求解。

数据范围：

- $1 \le N \le 2 \times 10^5$
- $1 \le M \le 10^9, 0 \le A_i < M$

F. Make it Palindrome 2

如果一次操作跨过了序列的中点，那么可以把跨过中点的一个对称的部分去掉（例如，$N=7$，操作 $[2,5]$ 等价于操作 $[2,2]$，因为 $[3,5]$ 不影响回文性）。于是我们可以假定所有操作不超过中点，即要么在左边要么在右边。

考虑序列 $B_i=(A_i-A_{N+1-i}) \bmod M$，其中 $1 \le i \le \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$，那么把 A 变成回文等价于把 B 变成全 0。（这里和以后的 $\bmod M$ 指的都是取模得到的那个 $[0,M-1]$ 中的数）

我们的操作是每次可以选择 (l,r)，满足 $1 \le l \le r \le \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$，以及 $c \in \{-1,1\}$，并将每个 $i=l,l+1,...,r$ 的 B_i 替换为 $(B_i+c) \bmod M$（这里 $c=1$ 对应于对 A 的左半部分操作，$c=-1$ 对应于对右半部分操作）。

做一次差分，得到序列 $C_i=(B_i-B_{i-1}) \bmod M, i=1,2,\cdots,\lfloor \frac{N}{2} \rfloor+1$，其中定义 $B_0=B_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor+1}=0$。那么就相当于每次可以选择一对 (i,j)，满足 $1 \le i,j \le \lfloor \frac{N}{2} \rfloor+1$，$i \ne j$，并将 C_i 替换为 $(C_i+1) \bmod M$，将 C_j 替换为 $(C_j-1) \bmod M$，需要把 C 变成全 0，问最小次数。

F. Make it Palindrome 2

设 $N_0 = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1$。对同一个元素同时 $+1$ 和 -1 是没用的，所以可以考虑子集 $X \subsetneq \{1, 2, ..., N_0\}$，仅对 $i \in X$ 的 $C_i \leftarrow C_i + 1$，对 $i \notin X$ 的 $C_i \leftarrow C_i - 1$，那么此时的最小步数就是

$$\max\left(\sum_{i \in X} C_i, \sum_{i \notin X} (M - C_i)\right) = \sum_{i \in X} C_i + \max(0, M \times (N_0 - |X|) - S)$$

其中 S 是所有 C_i 之和。我们需要选择一个 X 使得上面这个式子最小。

首先，肯定是选择最小的若干个元素作为 X 中的元素。进一步发现，只要 $M \times (N - |X|) - S > 0$，那么我们增大 $|X|$ 肯定更优，因为此时 $\sum C_i$ 会增大某个 $C_j < M$，而 $\max(0, M \times (N - |X|) - S)$ 会减小 M（注意 S 是 M 的倍数），所以总和会减小。

于是答案就是 C 排序后最小的 $N_0 - \frac{S}{M}$ 个元素之和。这个可以做到 $O(N)$，具体地求出 kth-element 之后计算比它小的元素和即可。

G. Mode in the Subtree

G. Mode in the Subtree

给定一棵以 1 为根的 N 个顶点的有根树，顶点编号为 1 到 N。顶点 i 的父节点是 p_i（满足 $p_i < i$）。每个顶点都有颜色：顶点 i 的颜色为 c_i（$1 \le c_i \le N$）。

对于每个 $v = 1, 2, ..., N$，求解以下问题：

设 f_i 表示在以顶点 v 为根的子树中，颜色为 i 的顶点个数。

求：

- 序列 $(f_1, f_2, ..., f_N)$ 中的最大值 m，以及
- 满足 $f_i = m$ 的正整数 i（$i \le N$）的个数 k。

数据范围：

- $1 \le N \le 2.5 \times 10^6$
- $1 \le c_i \le N$

G. Mode in the Subtree

直接 DSU on Tree 就可以做到 $O(N \log N)$ 了。

这里可以讲一下 DSU on Tree