AtCoder Beginner Contest 456 题目讲解

云浅

2026-5-4

Outline

A. Dice

A. Dice

略

B. 456

B. 456

略

C. Not Adjacent

C. Not Adjacent

给定一个由字符 `a`、`b`、`c` 组成的字符串 S。

求 S 的**非空子串**中，满足**任意相邻两个字符都不相同**的子串数量，结果对 998244353 取模。

注意：即使两个子串作为字符串相同，只要它们在 S 中的位置不同，就被视为不同的子串。

数据范围：

- S 是由 `a`、`b`、`c` 组成的字符串，长度在 1 到 3×10^5 之间（包含端点）

C. Not Adjacent

如果 $S_i = S_{i+1}$，那么合法的子串 $[l, r]$ 都不能包含 $[i, i+1]$ 作为子区间。

那么我们就在所有的这样的 $(i, i+1)$ 处把 S 断开，剩下的每一段内部的所有子区间都是合法的，答案就是每一段的 $\frac{l(l+1)}{2}$ 之和，其中 l 表示这一段的段长。

D. Not Adjacent 2

D. Not Adjacent 2

给定一个由字符 a、b、c 组成的字符串 S。

求 S 的**非空子序列**中，满足**任意相邻两个字符都不相同**的子序列数量，结果对 998244353 取模。

注意：即使两个子序列作为字符串相同，只要它们在 S 中的位置不同，就被视为不同的子序列。

数据范围：

- S 是由 a、b、c 组成的字符串，长度在 1 到 3×10^5 之间（包含端点）

D. Not Adjacent 2

考虑 DP。$\mathrm{dp}[i][c]$ 表示有多少个 $S[1,i]$ 的子序列满足：

- 相邻字符不相同
- 结尾为 c

那么转移就是

- 不加入 S_{i+1}：$\mathrm{dp}[i][c] \to \mathrm{dp}[i+1][c]$
- 加入 S_{i+1}：此时需要 $c \neq S_{i+1}$，可以做转移 $\mathrm{dp}[i][c] \to \mathrm{dp}[i+1][S_{i+1}]$

E. Endless Holidays

E. Endless Holidays

有 N 个城市，编号为城市 $1, 2, ..., N$。有 M 条双向道路连接城市对，其中第 i 条道路连接城市 U_i 和 V_i。任意两个城市之间都可以通过若干条道路相互到达。

一周有 W 天。一周按天 $1, 2, ..., W$ 推进，W 之后的下一天是第 1 天。

每个城市有特定的休息日。城市 i 的休息日信息由长度为 W 的字符串 S_i 给出：如果 S_i 的第 j 个字符是 `o`，则第 j 天是休息日；如果是 `x`，则是工作日。

高桥选择一个他喜欢的城市，并在第 1 天中午访问该城市。之后的每个夜晚，他重复选择：要么留在当前城市，要么移动到直接由道路相连的城市。如果存在一种移动方式，使得他每天中午所在的城市都是休息日，则输出 `Yes`，否则输出 `No`。

给定 T 个测试用例，请对每个测试用例求解。

数据范围：

- $1 \le T \le 10^5, 1 \le \sum N, \sum M \le 10^5, 2 \le W \le 10$

为了方便我们把每周的 W 天编号为 $0, 1, \cdots, W-1$。

建一个图，每个点形如 (u, j) 表示当前在点 u，目前是一周的第 j 天 $(0 \le j \le W-1)$。

对于原图的每条无向边 (u, v)，我们对每个 j 连两条有向边 $(u, j) \to (v, (j+1) \bmod W)$ 以及 $(v, j) \to (u, (j+1) \bmod W)$。

此外由于可以原地停留，还需要对每个 (u, j) 连一条边 $(u, j) \to (u, (j+1) \bmod W)$。

这样，有解就当且仅当保留所有 $S_{u,j} = \mathtt{o}$ 的点 (u, j) 后，存在某个点 u，使得从 $(u, 0)$ 出发可以到达一个环。进一步发现这其实等价于存在一个环，那么直接 DFS 一遍就好了。

时间复杂度 $O((N+M)W)$。

F. Plan Holidays

F. Plan Holidays

高桥正在尝试确定他未来 N 天的日程安排。最初，没有一天是节假日。

他可以重复以下两种操作任意次：

1. 选择一个在 1 到 N 之间的整数 i，并将第 i 天设为节假日。此操作的成本为 A_i。
2. 选择一个在 2 到 $N-1$ 之间的整数 i，满足第 $i-1$ 天和第 $i+1$ 天已经是节假日，并将第 i 天设为节假日。此操作是**免费**的。

求创建**至少连续 K 天**均为节假日所需的最小总成本。

给定 T 个测试用例，请对每个测试用例求解。

数据范围：

- $1 \le T \le 2 \times 10^5, 1 \le K \le N \le 2 \times 10^5, 1 \le A_i \le 10^9$
- 所有测试用例的 N 之和不超过 2×10^5

F. Plan Holidays

不妨先考虑 $K = N$ 的情况，如果要把整个序列都设为节假日所需的最小代价是多少。

考虑钦定某些位置 $1 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_k \leq N$ 是用操作 1 来设为节假日的，那么需要满足以下的条件：

- $p_1 = 1, p_k = N$
- $p_{i+1} - p_i \leq 2$

需要最小化 $\sum A_{p_i}$，那么直接 DP 就好了。

F. Plan Holidays

现在回到原问题，那么相当于需要选择一些位置 $p_1 \le \cdots \le p_k$ 满足 $p_k - p_1 + 1 \ge K$，且 $p_{i+1} - p_i \le 2$，最小化 $\sum A_{p_i}$。

可以发现，最优解一定满足 $p_k - p_1 + 1 = K$ 或者 $K + 1$，否则我们总可以删去 p_1。

考虑对一个区间 $[l, r]$ 怎么计算 $p_1 = l, p_k = r$ 的最优解，一种方法是用线段树：每个区间维护一个 $\text{ans}[c][d]$ 表示 $p_1 = l + c, p_k = r - d$（其中 $0 \le c, d \le 1$）的最优解，合并的时候形如

$$\text{left.ans}[c][x] + \text{right.ans}[y][d] \to \text{ans}[c][d]$$

其中要求 x, y 不能同时是 1。

那么对每个 $[i, i + K - 1]$ 和 $[i, i + K]$ 在线段树上查询一下就可以做到 $O(N \log N)$。

F. Plan Holidays

实际上我们可以做到 $O(N)$。😆

比如我们考虑区间长度为 K 的情况（长度为 $K+1$ 是类似的），可以双指针维护区间 $[i, i+K-1]$ 的答案（即维护一个 2×2 的数组），但问题在于右移左端点的时候需要删除，这个结构不能直接删除。

这个时候有一个技巧是双栈维护队列，具体来说，假如当前两个指针位于 l, r，我们取一个中间点 p 满足 $l \le p \le r$，然后对每个 $l \le i \le p$ 维护 $[i, p]$ 的答案（是一个 2×2 的数组，只需要 $O(1)$ 信息量），对每个 $p < i \le r$ 维护 $[p+1, i]$ 的答案。

F. Plan Holidays

那么对于双指针的操作：

- 要查询 $[l, r]$ 的答案：直接做一次 $O(1)$ 的合并 $[l, p] + [p+1, r]$。
- 右移 $r \to r+1$：从 $[p+1, r]$ 的答案 $O(1)$ 计算出 $[p+1, r+1]$ 的答案。
- 左移 $l \to l+1$：如果 $l+1 \le p$ 那么什么都不需要做，否则我们暴力重构，重新 $p = \frac{l+r}{2}$ 并 $O(r-l)$ 计算所有信息。

可以证明这是均摊 $O(1)$ 的：定义势能 $\Phi(l, r, p) = (r-p) - (p-l+1)$，那么每次移动端点会让 $\Phi \to \Phi + 1$，每次重构花费 Φ 代价把 Φ 变为 0，所以均摊是 $O(1)$ 的。🤩

总结一下，上面这个 trick 的使用条件有：可以维护出每个前后缀的信息，且信息支持快速合并（或者说，可以查询两组信息合并起来后的答案，这并不完全等价，e.g. 背包）

注意到这个题查询的区间实际上有更强的性质：长度都是一样的。

DS 题做的多的同学可以想到定长分块：例如要计算长度为 K 的所有区间的答案，我们可以直接把整个序列按照长度 K 分块，这样每个长度为 K 的区间都必定是某个块的前缀和另一个块的后缀拼起来。

那么我们对每个块预处理每个前后缀的答案就可以 $O(1)$ 查询一个长为 K 的区间的答案了，这样也是 $\frac{N}{K} \times K = O(N)$ 的。

G. Count Holidays

G. Count Holidays

高桥正在制定 N 天的工作日程，将每天指定为工作日或节假日。

给定一个长度为 N 的字符串 S，表示对工作日的约束。如果 S 的第 i 个字符是 x，则第 i 天必须是工作日；如果是 .，则第 i 天可以是工作日或节假日。

有 2^q 种满足约束的有效日程，其中 q 是 S 中 . 字符的数量。对于每个 $k = 1, 2, \ldots, N$，求解以下问题：

在满足约束的 2^q 种有效日程中，求**最长连续节假日段长度恰好为 k** 的日程数量，结果对 998244353 取模。

数据范围：

- N 是 1 到 2×10^5 之间的整数（包含端点）
- S 是由 .、x 组成的长度为 N 的字符串

下面把第 i 天是工作日记为 $S_i = 1$，节假日记为 $S_i = 0$。

考虑计算最长连续 0 段长度 $\leq k$ 的方案数，此时被确定的 1（即原本的 x）分割出的若干段都是独立的，总的答案是每一段的答案相乘。那么只需要考虑以下的问题：

- 长为 n 的 01 序列，有多少个满足最长的连续 0 段长度 $\leq k$

我们考虑容斥，钦定若干不重合的长度为 $k+1$ 的区间，并要求这些区间内都是全 0，且这些区间要么直接顶在序列的开头，要么前面必须填一个 1。

假设钦定了 c 个区间，再附上容斥系数 $(-1)^c$。

G. Count Holidays

先考虑没有区间顶在开头的情况，那么先选出来这些区间的开头 $x_1, \cdots, x_c$，其中 $x_1 \geq 2, x_{i+1} - x_i \geq k+1, x_c \leq n-k$。那么选区间的方案数是 $\binom{n-c(k+1)}{c}$，剩下的位置还有 $n-c(k+2)$ 个，方案数是 $2^{n-c(k+2)}$，总的方案数就是它们相乘。

对于有区间顶在开头的情况，相当于要求 $x_1 = 1$，此时选区间的方案数是 $\binom{n-c(k+1)}{c-1}$，剩下的位置个数是 $n-c(k+2)+1$。

于是钦定 c 个的方案数是 $\binom{n-c(k+1)}{c}2^{n-c(k+2)} + \binom{n-c(k+1)}{c-1}2^{n-c(k+2)+1}$，答案就是

$$\sum_c (-1)^c \binom{n-c(k+1)}{c} 2^{n-c(k+2)} + \binom{n-c(k+1)}{c-1} 2^{n-c(k+2)+1}$$

注意上述求和要求 $ck \leq n$，那么 c 只有 $O(\frac{n}{k})$ 级别，对所有 k 算答案的时间复杂度不超过 $O(n \log n)$，那么原题中对每一段全都算出答案的方案数也是 $O(N \log N)$ 的。

G. Count Holidays

相关资料：轻涟 La vaguelette，我当年写的题解，一种使用 GF 的题解