AtCoder Beginner Contest 451 题目讲解

云浅

2026-3-30

Outline

A. illegal

A. illegal

略

B. Personnel Change

B. Personnel Change

略

C. Understory

C. Understory

维护一个集合，支持两种操作：插入一个元素 x，或者给定 y，删除集合中所有 $\le y$ 的元素。每次操作完，输出集合中的元素个数。

数据范围：

- $1 \le Q \le 3 \times 10^5$
- $1 \le x, y \le 10^9$

C. Understory

可以用一个 `std::set` 维护，每次尝试删除最小值。

这样每个数只会被插入或者删除一次。复杂度是 $O(Q\log Q)$

D. Concat Power of 2

D. Concat Power of 2

定义一个正整数 X 是好的，当且仅当它在十进制下可以被写成若干个 2 的幂的拼接。

给定 N，求第 N 小的好的正整数。

数据范围：

- 保证答案不超过 10^9

D. Concat Power of 2

可以发现 10^9 以内的好的正整数不是很多，考虑直接把他们都求出来。

我们可以按照位数从小到大求，每次枚举最后一个 2 的幂是谁这样子来转移，就可以快速求出所有好的数。

E. Tree Distance

E. Tree Distance

给定一个 $N \times N$ 的矩阵 A，判断是否存在一棵带权的树，满足 (i, j) 在树上的最短路上的边权和恰好是 $A_{i,j}$。

数据范围：

- $1 \le N \le 3000, 1 \le A_i \le 9999$

E. Tree Distance

那么我们考虑全局最小的一个 $A_{i,j}$，发现这个 (i,j) 之间必须有直接连边，那么我们就把他连上。

那么按照边权从小到大考虑，如果当前的这条边 (x,y) 的两个端点还没有连通，那么它们两个必然有直接连边（否则就要经过边权更大的边了）。

于是可以发现，这棵树实际上必须是以 $A_{i,j}$ 为边权的完全图的最小生成树，把它求出来之后检查一下是否符合条件即可。

F. Make Bipartite 3

F. Make Bipartite 3

维护一张图，初始为空，你需要维护 Q 次操作，每次加一条边 (u, v)，加完边之后你需要求出能否将这张图黑白染色，使得相邻端点的颜色不同。如果可以的话，求出最少需要染多少个黑点。

数据范围：

- $2 \le N \le 2 \times 10^5, 1 \le Q \le 2 \times 10^5$

F. Make Bipartite 3

考虑每个连通块，只要其中一个点的颜色确定了，那么整个连通块就都确定了。如果合法的话这个连通块必须是二分图，最优方案一定是把两侧之间点数较少的那部分染成黑色。

那么我们直接维护每个点在最优情况下的染色，加一条边的时候分讨一下即可。如果出现了两个连通块之间的合并，可以用启发式合并。这样复杂度就是 $O(N \log N)$ 的。

G. Minimum XOR Walk

G. Minimum XOR Walk

给定一个简单连通无向图，包含 N 个顶点和 M 条边。顶点编号为 1 到 N，边编号为 1 到 M；第 i 条边是连接顶点 U_i 和 V_i 的无向边，权值为 W_i。

连接两个顶点的**路径**的权值定义为该游走所经过边的权值的异或和。如果同一条边被经过多次，则该边的权值在异或和中被计算相应次数。

给定一个非负整数 K。求满足以下条件的整数对 (x, y)（$1 \leq x < y \leq N$）的数量：连接顶点 x 和 y 的路径的最小权值不超过 K。

给定 T 个测试用例，请对每个测试用例求解。

数据范围：

- $1 \leq T \leq 10^5$
- $2 \leq \sum N, \sum M \leq 2 \times 10^5$
- $0 \leq K < 2^{30}$
- 给定图是简单且连通的

先考虑如何求 $x \to y$ 的最小 XOR 和路径。

这个是洛谷 P4151，任取一个生成树，假设所有非树边的权值分别为 $w_1, \cdots, w_k$，记 $\mathrm{XOR}(S) = \bigoplus_{i \in S} w_i$，那么对于两个点 x, y，假设 $x \to y$ 在树上的路径上边权 XOR 和为 W，那么最小值就是

$$\min_{S \subseteq \{1,2,\cdots,k\}} W \oplus \mathrm{XOR}(S)$$

可以把所有非树边的边权插入线性基然后求解。

G. Minimum XOR Walk

现在考虑怎么求有多少对 (x, y) 满足最短路 $\leq K$。

设 $f(w)$ 表示线性基中某个元素和 w 异或得到的最小值，用 a_x 表示 x 到根的路径上的边权的 XOR 和。那么 $x \to y$ 的 XOR 最短路长度就是 $f\left(a_x \oplus a_y\right)$。

实际上按位分析一下可以发现，我们有 $f(w_1 \oplus w_2) = f(w_1) \oplus f(w_2)$，于是可以直接求出所有的 $f(a_x)$ 然后建一个 trie 求解。

总时间复杂度为 $O(N \log V)$